

Cel

Celem projektu jest zaproponowanie nowego, wieloaspektowego ujęcia aksjomatów ekstremalnych. W ich analizie bierzemy pod uwagę ustalenia: logiczne, matematyczne oraz kognitywne. Najbardziej znane aksjomaty ekstremalne to: aksjomat zupełności w *Grundlagen der Geometrie* Hilberta, aksjomat ciągłości, aksjomat indukcji, aksjomaty ograniczenia w teorii mnogości oraz aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych w teorii mnogości. Ich rola miała polegać na jednoznacznym (algebraicznie lub semantycznie) scharakteryzowaniu modelu zamierzonej teorii. Zwykle aksjomaty ekstremalne wyrażają własności maksymalności bądź minimalności modelu. Odkrycia matematyczne w wieku XIX wymusiły próby formułowania takich aksjomatów. Wyniki uzyskane w logice w wieku XX wskazały na niektóre nieusuwalne ograniczenia metody dedukcyjnej. W kilku ostatnich dekadach obserwujemy proces sublimacji treści aksjomatów ekstremalnych: rozważa się ich specjalne wersje (np. ograniczona indukcja), wskazuje na naturalne różniczkowe punkty widzenia w matematyce (np. Borelowski, konstruktywny lub predykatywny punkt widzenia w teorii mnogości) oraz poddaje analizie ich konsekwencje dla praktyki matematycznej (np. jak patologie dopuszczane przez bardzo ogólne założenia przyczyniają się do niepełności teorii).

Badania

Dotychczas aksjomatami ekstremalnymi w ogólnieści zajmowano się rzadko, literatura przedmiotu dotyczy zwykle jedynie poszczególnych takich aksjomatów (indukcji, ciągłości, istnienia dużych liczb kardynalnych). Nie ma opracowania, w którym traktuje się te aksjomaty kompleksowo, uwzględniając aspekty logiczne, matematyczne oraz kognitywne. Wymiernym efektem projektu będzie przygotowanie takiego opracowania. Pozwoli ono na uporządkowanie wiedzy o trudnościach związanych z wyznaczaniem modeli zamierzonych teorii. O modelach zamierzonych teorii empirycznych pisano już sporo, naszym zdaniem nie wykorzystano jednak dotychczas w należyтым stopniu ogółu wiedzy o aksjomatach ekstremalnych oraz ich związków z odpowiedzialnymi za kontekst odkrycia w matematyce intuicjami zawodowych matematyków. Intuicje te wskazywałyby na dokonanie analizy tekstów źródłowych. Proponujemy przy tym nowe spojrzenie na problematykę dotyczącą intuicji matematycznych, uwzględniając ich stratyfikację (intuicje elementarne, związane z ludzkim wyposażeniem poznawczym, intuicje narzucone przez przymus symboliczny szkoły oraz zaawansowane intuicje zawodowych matematyków), a także ustalenia współczesnych nauk kognitywnych dotyczących poznania matematycznego.

Oprócz krytycznej analizy tekstów źródłowych, prowadząc do syntetycznego, wieloaspektowego ujęcia aksjomatów ekstremalnych celem projektu jest przeprowadzenie badań empirycznych dotyczących kształtowania się intuicji matematycznych. Dotychczas gromadziliśmy obserwacje na ten temat podczas kursów dotyczących rozwiązywania problemów matematycznych. W ramach projektu dokonamy syntezy tych obserwacji. Przeprowadzimy te serie eksperymentów dydaktycznych, polegających na badaniu zachowań poznawczych badanych, napotykających w sytuacji problemowej konieczność wykorzystania nowych dla nich pojęć i technik matematycznych, z którymi nie mieli kontaktu w edukacji szkolnej.

Podstawowym методом prowadzenia badań w części teoretycznej projektu będzie krytyczna analiza źródłowych tekstów matematycznych, wspierana ustaleniami dotyczącymi historii matematyki. Uwzględnione zostaną przede wszystkim poglądy zawodowych matematyków, propozycje filozofów traktowane będą pomocniczo. Należy przy tym szczególnie uważać na dwa sprawy. Po pierwsze, występują subtelne różnice w rozumieniu pojęć matematycznych w różnych epokach, a więc nie można automatycznie stosować współczesnego rozumienia takich pojęć do ich wcześniejszego rozumienia, które trzeba odtworzyć. Po drugie, publikacje matematyczne są ściśle produktem twórczości matematycznej i z reguły nie zawierają komentarzy, w jaki sposób dochodzono do osiągniętych wyników. Kontekst odkrycia matematycznego nie jest zatem bezpośrednio widoczny w publikacjach, trzeba dokonać jego rekonstrukcji.

W części empirycznej projektu, w której prowadzone będą eksperymenty dydaktyczne, podstawowym методом będzie obserwacja uczestnicząca. Będzie ona polegała na: zaprojektowaniu sytuacji problemowej, obserwacji działań poznawczych uczestników badania, kierowaniu ich uwagi ku rokowującym sukces strategiom, korekcji błędów, itp. Na podstawie takich obserwacji można będzie formułować zalecenia dotyczące efektywnej dydaktyki matematyki na poziomie uniwersyteckim.

Powody

Głównym powodem, dla którego proponujemy teoretyczną część projektu jest brak całościowego, kompleksowego opracowania roli aksjomatów ekstremalnych w kształtowaniu się wiedzy matematycznej. Twierdzimy, że aksjomaty ekstremalne odegrały przełomową rolę w rozwoju myśli matematycznej. Sytuacja w matematyce XIX wieku przyczyniła się do ich postulowania, natomiast wyniki metalogiczne uzyskane w wieku XX ukazały, jakim ograniczeniom podlegają wysiłki otrzymania jednoznacznych charakterystyk modeli zamierzonych teorii matematycznych. Skutkowało to dalszym rozwojem bardziej wyrafinowanych wersji takich aksjomatów, wraz z ukazywaniem ich matematycznych konsekwencji. Ukazanie w projekcie tych ciętych rozwoju powinno przyczynić się do lepszego zrozumienia, na czym polega poznanie matematyczne.

Powodem, dla którego proponujemy empiryczną część projektu jest zamiar uzupełnienia istotnej luki w edukacji matematycznej społeczeństwa. Prawie wszystkie badania poświęcone nabywaniu intuicji matematycznych poświęcone są edukacji szkolnej dzieci. Niedostateczną uwagę poświęca się natomiast edukacji matematycznej studentów kierunków pozamatematycznych, u których brak niezbędnych we współczesnym świecie kompetencji matematycznych spowodowany jest często traumatycznymi doświadczeniami w edukacji szkolnej. Twierdzimy, że ustalenia uzyskane w wyniku realizacji projektu mogą spełnić w tej mierze przydatną rolę terapeutyczną i dostarczyć pomysłów, w jaki sposób można kształtować poprawne intuicje matematyczne także u dorosłej młodzieży.