Każda przestrzeń Banacha E jest otoczona przez kilka skojarzonych z nią struktur metrycznych i topologicznych. Można na przykład rozważać słabą topologię na E, parę słabych topologii na przestrzeni sprzężonej E^*, czy też własności naturalnego zanurzenia E w drugą przestrzeń sprzężoną E^{**}. Bogate i złożone zależności pomiędzy metrycznym i topologicznymi własnościami tych obiektów są przedmiotem pasjonujących badań teoretycznej matematyki.

Istnieją ścisłe związki przestrzeni Banacha i zwartych przestrzeni topologicznych. Z jednej strony, każdy kompakt K wyznacza przestrzeń Banacha $C(K)$ rzeczywistych funkcji ciągłych na K; z drugiej strony, z każdą przestrzenią Banacha E wiąże się zwarta przestrzeń $K = B_{E^*}$, czyli kula w przestrzeni sprzężonej rozpatrywana w *-słabej topologii.

Od lat badana jest klasa kompaktów Radona-Nikodyma, czyli zwartych przestrzeni topologicznych, które zanurzają się w sprzężoną przestrzeń E^*, mającą tak zwaną własność Radona-Nikodyma. Jednym z problemów niniejszego projektu będzie próba scharakteryzowania tych zwartych przestrzeni liniowo uporządkowanych, które należą do wspomnianej klasy. W tym celu zamierzamy zastosować pewne nowe wyniki o teoriomnogościowej strukturze linowych porządków.

Innym naukowym zamierzeniem jest rozwiązanie kilku problemów o tak zwanych sumach skręconych przestrzeni c_0 z innymi przestrzeniami Banacha. Tutaj c_0 jest klasyczną przestrzenią ciągów liczb rzeczywistych zbieżnych do 0; ma ona następującą własność: Jeżeli zanurzymy c_0 w ośrodkową przestrzeń E, to jest ona dopełnialna w E, to znaczy istnieje przestrzeń Banacha F, taka że $E = c_0 \oplus F$. Jest wiele pytań o to, jak c_0 leży w pewnych nieośrodkowych nadprzestrzeniach. Załóżmy na przykład, że c_0 zanurza się w E, tak że przestrzeń ilorazowa E/c_0 jest izomorficzna z $C(2^{\omega_1})$, przestrzenią ciągłych funkcji na kostce Cantora ciężaru ω_1. Czy c_0 musi być dopełnialna w E? Jak niedawno udowodniliśmy, odpowiedź jest pozytywna w pewnym modelu teorii mnogości. Uprzednio pokazano, że odpowiedź negatywna wynika z hipotezy continuum. Nasz dowód opierał się na pomocniczych rezultatach o przestrzeniach zwartych i funkcjach na algebrach Boole'a. Jak sądzimy, nasza metoda pozwoli rozwiązać inne problemy związane z tym zagadnieniem i uzyskać ciekawe wyniki ogólniejszej natury.

Algebra miary to algebra Boole'a powstała z borelowskich podzbiorów $[0, 1]$, po utożsamieniu zbiorów, które różnią się o zbiór miary Lebesgue'a zero. Jest to klasyczna algebra, ściśle związana z przestrzenią Banacha $L_\infty[0, 1]$. W teorii forsingu wiąże się ona z tak zwanym modelem *random* teorii mnogości. Wiele lat temu M. Talagrand zauważył, że w tym modelu zachodzi wiele 'pozytywnych' zjawisk, dotyczących całkowania funkcji o wartościach wektorowych, podczas gdy założenie hipotezy continuum prowadzi do zjawisk raczej 'patologicznych'. Naszym celem jest badanie własności algebry miary, zarówno tych pochodzących z analizy funkcjonalnje, jak i teorii mnogości.

Nasze zamierzenia badawcze obejmują analizę nowych metod konstruowania przestrzeni Banacha. W szczególności interesuje nas pojęcie wolnej kraty Banacha $FBL[E]$ generowanej przez daną przestrzeń Banacha E. Formalna definicja $FBL[E]$ naśladuje powszechnie stosowaną w matematyce metodę definiowana wolnych struktur. Taka krata Banacha jest, w pewnym sensie, jedyna i może być opisana jako podprzestrzeń pewnej przestrzeni funkcii ciągłych. Na razie niewiele wiadomo o strukurze $FBL[E]$. W szczególności chcemy zrozumieć, kiedy $FBL[E]$ jest przestrzenią Banacha słabo zwarcie generowalną. Zamierzamy wreszcie systematycznie badać związki pomiędzy ideałami na zbiorze liczb naturalnych i przestrzeniami Banacha. Ideał na $\mathbb{N}$ to dziedziczna rodzina podzbiorów, zawierajaca zbiory skońzone i zamknięta na skończone sumy. Jeżeli $(x_n)_n$ jest ciągiem w przestrzeni Banacha E, to można rozważyć ideał tych $A \subseteq \mathbb{N}$, dla których szereg $\sum_{n \in A} x_n$ jest bezwarunkowo zbieżny. Taki ideał należy do ciekawej klasy tak zwanych analitycznych P-ideałów. Z drugiej strony każdy analityczny P-ideał jest związany z pewną podaddytywną funkcją na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, naturalnie definiującą przestrzeń Banacha. Jednym z naszych celów jest badanie przestrzeni Banacha związanych w ten sposób z naturalnymi ideałami na $\mathbb{N}$.