

Nierówność Hardy'ego

W matematyce bardzo ważną rolę odgrywają wszelkiego rodzaju równości i tożsamości. Precyzyjniej mówiąc, dla matematyka interesujące jest gdy jakaś wielkość zależna od pewnego parametru jest równa innej wielkości, która również zależy od rzeczonoego parametru, choć pozornie w inny sposób. Powszechnie znanym przykładem takiej równości może być Twierdzenie Pitagorasa, mówiące że w każdym trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej. W tym przypadku zmiennym parametrem jest trójkąt prostokątny. Innym popularnym przykładem jest *jedyńska trygonometryczna*. Ta tożsamość mówi o tym, że suma kwadratów sinusa i cosinusa tego samego kąta jest zawsze równa jeden. Oczywiście, obie wymienione funkcje trygonometryczne zależą od kąta, ale suma ich kwadratów jest już od niego niezależna.

Poza równościami dla matematyków bardzo ważne są nierówności. Ich istota polega na tym, aby z dwóch zmiennych wielkości jedna zawsze była większa (wtedy mówimy o nierówności ostrej) lub nie mniejsza (taką nierówność nazywamy słabą) od drugiej. Znanym przykładem może być własność długości boków w trójkątach. Suma długości dowolnych dwóch boków trójkąta jest zawsze (ostro) większa od długości trzeciego boku. Tę właściwość nazywamy nierównością trójkąta. Warto posłużyć się w tym miejscu jeszcze jednym przykładem, tym razem zaczerpniętym z fizyki. W 1927 roku Werner Heisenberg zaobserwował i skonstatował regułę, którą dziś nazywamy *zasadą nieoznaczoności* lub *nierównością Heisenberga*. Opisuje ona pewien fenomen natury rzeczywistości. Mianowicie, nie można wyznaczyć jednocześnie dokładnego położenia i pędu cząsteczki; iloczyn błędów pomiarów jest zawsze (słabo) większy od stałej Plancka podzielonej przez 4π . Reasumując, nierówności pełnią rolę równie ważną jak tożsamości, a przy tym, jak się okazuje, występują o wiele częściej w przyrodzie i w matematyce.

Głównym celem niniejszego projektu jest zbadanie nierówności znanej w świecie matematyki, a konkretniej w świecie analizy harmonicznej, pod nazwą *nierówności Hardy'ego*. Pochodzi ona od brytyjskiego matematyka dwudziestego wieku oraz wielkiego fana krykieta Godfrey'a Harolda Hardy'ego. Porównywanymi wielkościami są tutaj suma współczynników rozwinięcia pewnej (uogólnionej) funkcji w zadanej bazie ortogonalnej oraz wielkość tejże funkcji mierzona ustaloną normą. Wspomnianą bazą może być układ nieskończenie wielu funkcji, który ma następującą własność: znając jedynie współczynniki rozwinięcia w rzeczonoj bazie funkcji pochodzącej z pewnej dużej przestrzeni funkcyjnej można odtworzyć tę funkcję. Różne układy ortogonalne pojawiają się w matematyce bardzo często, a własności reprodukcyjne odgrywają kluczową rolę w wielu rozumowaniach. Priorytetem tego projektu jest ustalenie formy nierówności Hardy'ego w wielu kontekstach, które pojawiają się w innych dziedzinach matematyki i fizyki, np. w równaniach różniczkowych. Intencją aplikanta jest również otrzymanie wyniku możliwie ogólnego i abstrakcyjnego, który będzie mógł być stosowany w różnych szacowaniach, często niezbędnych dla rozwiązania innych postawionych problemów. Ostatecznym celem jest pełne scharakteryzowanie nierówności Hardy'ego na *przestrzeniach typu jednorodnego*, które w ostatnich pięciu dekadach zaczęły pełnić fundamentalną rolę w analizie matematycznej.

Kluczowym powodem podjęcia opisaney tematyki jest próba otrzymania nierówności, która mogłaby być przydatna w wielu innych problemach jakie wyrastają na gruncie analizy harmonicznej. Takie zadanie wymaga rozwinięcia aparatu matematycznego znanego dotychczas oraz wypracowania pewnych całkowicie oryginalnych metod. Lepsze zrozumienie konceptów relatywnie nowych w świecie nauki, takich jak wspomniane przestrzenie typu jednorodnego, jest dodatkową korzyścią, która może wynikać z realizacji tego projektu, w konsekwencji wzbogacając specjalistyczną literaturę. Ponadto niewątpliwą zaletą znalezienia odpowiedzi na postawione pytania byłby bliski związek badanych obiektów z fizyką.