Streszczenie popularnonaukowe

Transformata Hilberta funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiowana jest przy pomocy całki singularnej:

$$Hf(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{pv}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{t-s}\, ds.$$

Jest to jedno z podstawowych pojęć analizy harmonicznej, które ponadto odgrywa ważną rolę w innych obszarach matematyki, a także w analizie sygnałów. Już David Hilbert dowiódł w 1905 roku, że Hf jest „tego samego rzędu wielkości", co f. Ściślej mówiąc: f oraz Hf mają równe normy L^2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Hf(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

W 1928 roku Marcel Riesz udowodnił podobne oszacowanie dotyczące norm L^p, gdzie $p \in (1, \infty)$ — istnieje stała A_p taka, że:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Hf(t)|^p dt \leqslant (A_p)^p \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt.$$

Optymalna wartość stałej A_p została wyznaczona dopiero przez Stylianosa Pichoridesa, który w swojej pracy z 1972 roku wykazał, że powyższa nierówność zachodzi ze stałą $A_p = \max\{\tan \frac{\pi}{2p}, \cot \frac{\pi}{2p}\}$, ale staje się nieprawdziwa, gdy wartość A_p jest mniejsza.

Funkcja $f(t)$ opisuje *sygnał* w czasie ciągłym. W praktycznych zastosowaniach często jednak rozważa się sygnały z czasem dyskretnym, a więc podwójnie nieskończone ciągi (a_n), indeksowane liczbami całkowitymi. Z tego powodu ciekawe są badania dotyczące dyskretnych odpowiedników transformaty Hilberta. Jest jednak kilka naturalnych dyskretyzacji tego operatora. Narzucająca się definicja to:

$$\mathcal{H} a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{a_k}{n-k}\,.$$

Nieco bardziej użyteczna okazuje się transformata Riesza–Titchmarscha:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{RT}} a_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k \text{ nieparzyste}} \frac{a_k}{n-k}\,.$$

Oba operatory, $\mathcal{H}$ oraz $\mathcal{H}_{\mathrm{RT}}$, były badane przez Marcela Riesza i Edwarda Charlesa „Teda" Titchmarscha w latach 20. XX wieku. Ci dwaj matematycy udowodnili nierówności

$$\sum_n |\mathcal{H} a_n|^p \leqslant (B_p)^p \sum_n |a_n|^p,$$
$$\sum_n |\mathcal{H}_{\mathrm{RT}} a_n|^p \leqslant (C_p)^p \sum_n |a_n|^p$$

z pewnymi stałymi B_p, C_p i wysnuli hipotezę, że optymalne wartości obu stałych są takie same, jak stałej A_p związanej z ciągłą transformatą H. E.C. Titchmarsch podał nawet dowód tego faktu, lecz wkrótce w jego rozumowaniu odkryto błąd. Mimo wysiłku wielu znamienitych matematyków pytanie o równość optymalnych stałych A_p, B_p, C_p pozostawało otwarte przez niemal wiek, z wyjątkiem szczególnego przypadku, gdy $p = 2^n$ lub $p = 2^n/(2^n - 1)$ dla pewnego $n = 1, 2, \ldots$

Względnie łatwo zauważyć, że zachodzą nierówności $C_p \geqslant B_p \geqslant A_p$. W 2017 roku Rodrigo Bañuelos z Purdue University i kierownik niniejszego grantu zdołali wykazać równość optymalnych stałych A_p i B_p. Wynik ten został opublikowany na łamach znakomitego czasopisma *Duke Mathematical Journal* w 2019 roku. Nowatorskim elementem dowodu jest ustalenie związku między *dyskretną* transformatą Hilberta i pewną operacją dotyczącą *ciągłej* zmiennej: *transformatą martyngałową* pochodzącą od odpowiedniego dwuwymiarowego procesu dyfuzji.

Niniejszy projekt ma dwa główne cele. Pierwszym jest zbadanie zakresu stosowania wspomnianego wyżej argumentu i opisanie klasy pokrewnych transformat, które mogą być badane w podobny sposób. Drugi cel to znalezienie innych metod, które w ostatecznym rozrachunku być może pozwolą wykazać, że optymalna wartość stałej C_p jest taka sama, jak w przypadku stałych A_p oraz B_p.