

## Geometryczne wielkości związane z równaniami nielokalnymi

### Popularnonaukowe streszczenie projektu

---

W ramach projektu zamierzamy zbadać geometryczne wielkości, które zdefiniowane są poprzez rozwiązania dla pewnej klasy cząstkowych równań różniczkowych. Podstawowym przykładem jest obwód dla ustalonego mierzalnego podzbioru przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^d$ . W klasycznej teorii operatorów lokalnych obwód zbioru, który posiada gładki brzeg, jest równy mierze Hausdorffa jego brzegu. Dla zbiorów bez gładkiego brzegu, ich obwód definiuje się przy pomocy funkcji o ograniczonym wahanii. W teorii równań nielokalnych stosujemy poniekąd analogiczne podejście wprowadzając pojęcie obwodu jako pewnego funkcjonału, który w oparciu o ewaluację ustalonej funkcji lub miary uwydatnia brzegowe własności zbioru. W trakcie prac nad projektem, chcemy zająć się nie tylko uogólnionym obwodem zdefiniowanym dla szerokiej klasy zbiorów, ale zamierzamy również zbadać ściśle powiązane wielkości, takie jak funkcjonał zawartości ciepła w zbiorze, czy geometryczny obiekt zwany średnią krzywizną. Nasze badania dotyczyć będą związków tychże obiektów z ich klasycznymi odpowiednikami (twierdzenia graniczne) oraz ich analitycznych i geometrycznych własności, włączając w to między innymi nierówności izoperymetryczne, czy asymptotyczne zachowanie.

Nielokalne wersje klasycznych obiektów takich jak obwód czy krzywizna odgrywają istotną rolę w wielu dziedzinach nauk przyrodniczych. Przykładowo, nielokalne obwody znajdują interesujące zastosowania w teorii przetwarzania obrazu, gdzie wykorzystywane są do aproksymacji obwodu obrazu źródłowego. Z kolei nielokalne krzywizny pojawiają się w teorii dynamiki cieczy oraz w modelach opisujących przejścia fazowe, w szczególności w problemach dotyczących minimalnych powierzchni, czy teorii ruchu przez średnią krzywiznę. Ponadto nielokalne krzywizny stanowią klasę ważnych obiektów w teorii faz granicznych w gazach i ciałach stałych oraz w teorii nadprzewodników i nadciekłości.

Kolejny istotny problem badawczy w naszym projekcie dotyczy równania brzegowego typu Bernoulliego (tzw. *free boundary problems*) dla obszarów gwiaździstych. Zagadnienie to występuje w kilku dziedzinach fizyki takich jak teoria plazmy, teoria półprzewodników, czy teoria propagacji ognia. Tutaj również interesować będą nas nielokalne wersje równania Bernoulliego, w którym klasyczny operator Laplace'a zastąpimy jego nielokalnym odpowiednikiem, a mianowicie ułamkowym laplasjanem. Operator ten pojawia się naturalnie, gdy rozważane są modele z interakcjami typu *long range*. Naszym głównym celem jest dyskusja istnienia i jednoznaczności rozwiązań dla nielokalnego równania typu Bernoulliego. Kwestie te pozostają w ścisłej zależności od geometrycznych własności obszaru, na którym sformułowane jest wyjściowe zagadnienie.

Podsumowując, omawiany projekt to interdyscyplinarne przedsięwzięcie, które dotyczy pewnej klasy pojęć matematycznych i fizycznych. Nasze podejście i metodyka badań stanowią kombinację metod analitycznych, probabilistycznych i geometrycznych. Dlatego tematyka projektu powinna okazać się interesująca dla szerokiego grona uczonych z różnych dziedzin nauk przyrodniczych.