Nr rejestracyjny: 2019/34/E/ST6/00443; Kierownik projektu: dr hab. Bartosz Maria Walczak

Kolorowania, kliki i zbiory niezależne w klasach grafów

Bartosz Walczak, Uniwersytet Jagielloński

Grafy są abstrakcyjnymi strukturami, które mają za zadanie modelować interakcje między parami obiektów. Obiekty takie są reprezentowane w grafie za pomocą wierzchołków, a interakcje — za pomocą krawędzi łączących pewne pary wierzchołków. Prostota i zarazem ogólność tych struktur uczyniły teorię grafów jedną z najważniejszych i najdynamiczniej rozwijających się gałęzi matematyki skończonej. Ponieważ zaś wiele praktycznych problemów daje się modelować za pomocą grafów, poszukiwanie efektywnych algorytmów grafowych stanowi bardzo ważny obszar badań w informatyce.

Zbiór wierzchołków grafu nazywamy *zbiorem niezależnym*, jeżeli żadne dwa jego wierzchołki nie są połączone krawędzią. *Kolorowaniem* grafu nazywamy podział jego wierzchołków na zbiory niezależne, które nazywamy wówczas *kolorami*. Dwa klasyczne problemy optymalizacji kombinatorycznej na grafach polegają na wyszukiwaniu jak największego zbioru niezależnego w grafie oraz na kolorowaniu grafu za pomocą jak najmniejszej liczby kolorów. Mają one szczególne znaczenie w praktycznych zastosowaniach grafów do modelowania konfliktów w zarządzaniu zasobami (takich jak szeregowanie zadań czy przydział częstotliwości w sieciach komórkowych), gdzie zbiory niezależne i kolorowania reprezentują podsystemy wolne od konfliktów i podziały na takie podsystemy.

Dla ogólnych grafów wymienione problemy są zbyt złożone — nie jesteśmy i zapewne nigdy nie będziemy w stanie ich rozwiązywać za pomocą efektywnych algorytmów, nawet w przybliżeniu. Żeby ominąć tę trudność, zamiast dowolnych grafów zajmujemy się klasami grafów spełniających pewne strukturalne ograniczenia. W niniejszym projekcie rozważamy dwa naturalne sposoby definiowania takich ograniczeń: przez określenie *geometrycznej reprezentacji*, jaką rozważane grafy muszą posiadać, lub *struktury zabronionej*, której rozważane grafy nie mogą zawierać.

Pierwsza grupa proponowanych zadań badawczych dotyczy zależności minimalnej liczby kolorów wystarczającej do pokolorowania grafu od rozmiaru największej *kliki* w tym grafie, czyli zbioru wierzchołków wzajemnie połączonych krawędziami. W klice każdy wierzchołek musi mieć inny kolor, a więc graf wymaga co najmniej tylu kolorów, ile wierzchołków ma największa klika. Istnieją jednak grafy niezawierające klik większych niż dwuwierzchołkowe, które mimo to wymagają dowolnie wielu kolorów. Klasy grafów, w których liczba wymagana kolorów jest ograniczona względem rozmiaru największej kliki, nazywamy *χ-ograniczonymi*. Podstawowe pytania związane z χ-ograniczonością dotyczą następujących kwestii:

- Które klasy grafów są χ-ograniczone?
- W klasach grafów, które są χ-ograniczone, jak szybko liczba potrzebnych kolorów może rosnąć wraz z rozmiarem największej kliki (w szczególności — czy rośnie wielomianowo)?
- W klasach grafów, które nie są χ-ograniczone, jak szybko liczba potrzebnych kolorów może rosnąć wraz z liczbą wierzchołków przy ustalonym maksymalnym rozmiarze kliki?

W ostatnich kilku latach w badaniach dotyczących χ-ograniczoności (z istotnym udziałem kierownika projektu) dokonał się bardzo duży postęp, który doprowadził do całkowitego lub częściowego rozwiązania wielu klasycznych problemów z lat osiemdziesiątych, zwłaszcza dotyczących pierwszego powyższego pytania, oraz dostarczył nowych narzędzi do pracy z klasami χ-ograniczonymi. W niniejszym projekcie skupiamy się głównie na dwóch pozostałych pytaniach, a także na problemie z nimi związanym — weryfikacji, czy poszczególne klasy spełniają tzw. własność Erdősa-Hajnala, tzn. czy w grafach tych klas istnieją kliki lub zbiory niezależne wielomianowego rozmiaru (jest to własność słabsza niż wielomianowa χ-ograniczoność). Słynna hipoteza Erdősa-Hajnala orzeka, że własność ta zachodzi w każdej klasie grafów z co najmniej jedną strukturą zabronioną, i liczymy na to, że nasze badania będą stanowiły przyczynek do rozstrzygnięcia także tej hipotezy.

Druga grupa proponowanych zadań badawczych dotyczy efektywnych algorytmów znajdowania zbiorów niezależnych w poszczególnych klasach grafów. Poszukujemy zarówno algorytmów dokładnych, które zawsze znajdują największy zbiór niezależny i których miarą efektywności jest czas ich działania, jak i tzw. algorytmów aproksymacyjnych, które znajdują zbiór w przybliżeniu największy i których podstawową miarą efektywności jest dokładność przybliżenia. Również w tym obszarze badań dokonał się ostatnio znaczący postęp, ale wiele ważnych problemów, np. istnienie algorytmu wielomianowego w klasach grafów z zabronioną ścieżką, pozostaje nadal otwartych. Liczymy na to, że badania problemów pierwszej grupy pomogą nam gruntownie zrozumieć rozważane klasy grafów i otworzą drogę do wypracowania poszukiwanych algorytmów lub do uzyskania teoretycznego uzasadnienia braku takich algorytmów — tzw. warunkowych ograniczeń dolnych złożoności obliczeniowej.