

Optymalizacja kombinatoryczna w warunkach niepewności: matroidy, skojarzenia i funkcje submodularne

Dziedzina algorytmów aproksymacyjnych dla problemów kombinatorycznych w warunkach niepewności jest intensywnie badana od ponad dekady i wciąż przyciąga więcej uwagi. Najistotniejszą charakterystyką takich problemów jest to, że operujemy w nich na danych, których w pełni nie znamy z góry.

Zainteresowanie takimi problemami jest spowodowane głównie dwoma faktami. Pierwszy to postępująca cyfryzacja naszego życia skutkująca kolekcjonowaniem olbrzymich ilości danych. Dzięki tym danym skomplikowane systemy komputerowe mogą zostać skonstruowane, które będą opierać się jedynie na predykcjach pozyskanych z tych danych.

Drugim powodem są zastosowania w internecie, gdzie systemy muszą często podejmować bardzo szybkie decyzje na olbrzymiej wielkości strumieniach danych. Na przykład, serwer reklamowy będzie musiał w ciągu dnia wyświetlić miliony reklam i za każdym razem będzie musiał natychmiastowo podjąć decyzję wyboru reklamy, która zmaksymalizuje zyski reklamodawców.

Z powodu rosnącego znaczenia takich problemów badania nad nimi zarówno teoretyczne jak i praktyczne dynamicznie postępują. Co więcej, jest autentyczna potrzeba rozwoju teoretycznych pomysłów, na bazie których skonstruowane będą systemy komputerowe, które będą musiały działać w rygorystycznych warunkach biznesowych i przemysłowych.

W proponowanych badaniach chcemy skupić się na teoretycznych podstawach optymalizacji w warunkach niepewności. Przedstawimy najpierw trzy najbardziej podstawowe ilustracje takich problemów.

Problem sekretarki Stoimy przed zadaniem wyboru najlepszej sekretarki. Sekretarki będą przychodzić na rozmowę jedna po drugiej w losowej kolejności. Każda sekretarka może zostać porównana do wszystkich poprzednich sekretarek pod względem jej zawodowych umiejętności. Po każdej rozmowie musimy zdecydować, czy chcemy sekretarkę zatrudnić, czy też zrezygnować z niej (nie możemy czekać z ogłoszeniem decyzji). Dobrze znany klasyczny algorytm z 1963 roku jest w stanie wybrać najlepszą sekretarkę z prawdopodobieństwem $1/e \approx 0.37$ i co więcej wiemy, że jest to najlepszy możliwy wynik.

Nierówność proroka Rozważmy gracza w kasynie, który gra w znaną sobie grę wiele razy widząc ciąg jej wyników. Po poznaniu wyniku danej rozgrywki gracz musi albo zaakceptować wynik tej rozgrywki i na niej zakończyć całą grę albo zignorować ten wynik i grać dalej. Klasyczny wynik z 1978 mówi, że gracz jeśli tylko zna grę, to jest w stanie wygrać przynajmniej połowę tego co prorok, który przed rozgrywką znałby całą przyszłość dotyczącą wszystkich rozgrywek.

Problem wynajmu nart Wyobraźmy sobie, że jedziemy na narty. Nie wiemy, ile dni będziemy jeździć, wszak jazda może się nam znudzić, możemy mieć wypadek albo pogoda może się zwyczajnie zepsuć. Załóżmy, że wynajęcie nart na jeden dzień kosztuje 1PLN, natomiast zakup nart kosztuje 10PLN. Jeśli wiedzielibyśmy dokładnie, ile dni będziemy jeździć na nartach, to zminimalizowanie wydatku na narty byłoby bardzo łatwe — jeśli mniej niż 10 dni, to wynajmuj, natomiast jeśli 10 lub więcej to kup je. Ale co mamy zrobić, jeśli w rzeczywistości nie znamy przyszłości? Nie jest trudno zauważyć, że jakakolwiek sensowna strategia nie wyda więcej niż 20PLN (po prostu wynajmuj przez 10 dni, a później kup). Jednakże zaskakującym na pierwszy rzut oka może być fakt, że istnieje losowa strategia, która średnio wyda co najwyżej 16PLN.

We projekcie planujemy zajmować się problemami, w których niepewność dotycząca danych jest podobnej natury, jednak jest wykorzystywana w znacznie bardziej skomplikowanych zastosowaniach, które w naturalny sposób pochodzą z tego, w jaki komputery pomagają nam współcześnie na co dzień.