Ułamkowe równanie ciepła na zbiorach ograniczonych

Klasyczne równanie przewodnictwa ciepła badane było już na początku XIX wieku przez J. Fouriera. Używając m.in. szeregów trygonometrycznych nazwanych potem jego nazwiskiem, opisał on jak zmienia się w czasie temperatura na pręcie przy założeniu pewnej temperatury początkowej, oraz zerowej temperatury na zewnątrz pręta.

Równie ciekawym matematycznie (i niewiele mniej życiowym!) problemem jest badanie temperatury na nieskończonym pręcie (prostej), płaszczyźnie, lub nawet wielowymiarowej przestrzeni. Nie mamy tutaj do czynienia z warunkami na zewnątrz, a jedynie z początkową temperaturą. Takie zagadnienie ma bardzo eleganckie rozwiązanie: jest to całka po przestrzeni z temperatury początkowej pomnożonej przez jądro ciepła, zwane również jądrem Gaussa–Weierstrassa.

Jądro Gaussa–Weierstrassa ma niesamowite znaczenie w teorii procesów stochastycznych – opisuje ono położenie w danym czasie cząstki dyfundującej zgodnie z ruchem Browna. Do tego modelu matematycznego przyczynili się na początku XX wieku m.in. Einstein, Smoluchowski i Wiener. Gdybyśmy zatem przykładowo założyli, że na początku całe ciepło jest skupione w jednym punkcie nieskończonego pręta, to rozwiązanie równania ciepła – temperatura, byłaby tym samym co rozkład położenia w danym czasie cząstki, która zaczyna ruch tam, gdzie znajdowało się źródło ciepła. Jest to bodaj najbardziej podstawowy most pomiędzy teorią równań różniczkowych i teorią procesów stochastycznych.

Nieco później odkryto, że równania różniczkowe na obszarach, czyli na przykład na skończonym pręcie, który badał Fourier, również można rozwiązywać za pomocą procesów stochastycznych. Co więcej, metody probabilistyczne pozwalają w bardzo łatwy sposób uchwycić niezerowe warunki na brzegu. Rozwiązanie otrzymuje się rozważając proces stochastyczny w momencie pierwszego wyjścia z rozważanego obszaru – dla ruchu Browna możemy myśleć o miejscu pierwszego uderzenia cząstki w brzeg zbioru. To daje nam pewien rozkład prawdopodobieństwa, względem którego należy scałkować warunek brzegowy, aby otrzymać rozwiązanie. Żeby badać w ten sposób równanie ciepła, rozważamy czasoprzestrzenny ruch Browna – tworzy się go poprzez dodanie nowej współrzędnej czasowej, po której proces porusza się ruchem jednostajnym w dół.

W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat bardzo wzrosło zainteresowanie badaniem równań *dyfuzji* kierowanych operatorami innymi niż laplasjan, lub ogólniej, operatory różniczkowe drugiego rzędu. Najbardziej interesuje nas tutaj przykład ułamkowego laplasjanu – mówimy wówczas o ułamkowym równaniu ciepła. Jest ono ściśle związane z izotropowym procesem α-stabilnym. Jest to ruch losowy w pewnym sensie przypominający ruch Browna z diametralną różnicą – cząstka nie porusza się po ciągłej trajektorii, lecz może wykonywać skoki.

Celem naszych badań będzie precyzyjne opisanie rozwiązań ułamkowego równania ciepła na zbiorach otwartych, skonstruowanych za pomocą metod probabilistycznych, tzw. funkcji α-parabolicznych. Z racji skokowego charakteru dyfuzji, wymagana jest zmiana podejścia do warunku brzegowego – tym razem bierzemy pod uwagę wszystkie informacje, które znajdują się *na zewnątrz* obszaru, nie tylko na jego brzegu. Opracujemy postać jąder całkowych, z których można wytwarzać rozwiązania, które to rozwiązania sklasyfikujemy ze względu na regularność przy brzegu zbioru.

Z racji istnienia wielu różnych definicji ułamkowego operatora Laplace'a, bardzo istotną kwestią będzie umieszczenie badań w możliwie szerokim kontekście tak, żeby ich wyniki były użyteczne również dla specjalistów wywodzących się ze szkoły analitycznej. W tym celu przestudiujemy regularność naszych rozwiązań wewnątrz rozważanego zbioru tak, żeby umożliwić operowanie największą możliwą liczbą definicji. W tym procesie będziemy musieli dobrze zrozumieć gładkość jądra ciepła Dirichleta dla ułamkowego laplasjanu, co samo w sobie jest ciekawym tematem badań.

Efektem naszej pracy będzie lepsze zrozumienie struktury funkcji α-parabolicznych, w szczególności ich możliwych osobliwości przy brzegu. Ponadto, jak wiemy z równań eliptycznych i klasycznych, własność średniej jest silnym narzędziem w badaniu regularności funkcji α-parabolicznych i liczymy, że będzie ona użyteczna dla naukowców ze środowiska równań różniczkowych, oraz innych obszarów matematyki.