

Szorstkie fale niezmiennicze

Matematycy często są zainteresowani prognozami ilościowymi na temat takich czy innych zjawisk. *Analiza matematyczna* jest dziedziną matematyki, która dotyczy tych zjawisk, które wiążą się z jakimś ruchem lub zmianą. Konkretnym przykładem tego jest dobrze znana wszystkim postać zmiany: wrzucenie przedmiotu do sadzawki pełnej spokojnej wody. Z miejsca, w którym przedmiot uderzył w wodę, zaczną rozchodzić się fale, a powierzchnia wody zmieni się wraz z nadchodzeniem fal. W końcu fale osiągną krawędzi basenu i odbijają się od nich. Prognozy ilościowe dotyczące trajektorii fal są łatwe, jeśli basen jest nieruchomy, a jego krawędzie gładkie. Ale co się stanie, gdy basen będzie miał bardzo nierówne krawędzie i rogi? Można sobie wyobrazić chaos, który może nastąpić: fale będą odbijać się od krawędzi w nieoczekiwany sposób, a następnie odbijać się od siebie nawzajem, aż trudno będzie dostrzec w wodzie jakąkolwiek znaczącą strukturę i regularność.

Projekt dotyczy określenia w sensie ilościowym, jak duży poziom szorstkości i kanciastości musi osiągnąć brzeg sadzawki, zanim trudno będzie przewidzieć w niej zachowanie fal. W rzeczywistości projekt dotyczy nie tylko fal wodnych, ale ma na celu zbadanie zachowania różnych fal: fal elektromagnetycznych, dźwiękowych, radiowych, a nawet fal grawitacyjnych; wszystko, co można opisać tak zwanym *równaniem falowym*. Takie równania są spełnione przez wszystkie fale, które znamy z codziennego życia, i wychwytyją podstawowe własności fal z prawdziwego życia pomijając nieistotne szczegóły, które tylko zaciemniają podstawowe wzorce.

Mówiąc dokładniej, matematycy mogą ocenić stopień gładkości powierzchni poprzez przypisanie jej pewnej liczby. Gładka powierzchnia, taka jak okrąg, będzie miała bardzo wysoką miarę gładkości, podczas gdy powierzchnia z dużą liczbą ostrych krawędzi i narożników będzie miała małą miarę gładkości. Jeśli powierzchnia jest szczególnie fraktalna i chaotyczna, może mieć nawet gładkość równą zero. Naturalne pytanie brzmi zatem: jaka jest krytyczna miara gładkości, poniżej której zasadniczo zmienia się zachowanie fal na tej powierzchni i trudniej jest przewidywać ilościowo ich zachowanie? Będzie to zazwyczaj zależęć od konkretnego rodzaju rozważanego zachowania, chociaż dla wielu problemów krytyczna miara gładkości okazała się równa dwa. Ostatnio, we współpracy z innymi, kierownik grantu wykazał, że dla określonego rodzaju zachowania fali zwanego "regularnością L_p " wartość krytycznej gładkości nie jest większa niż dwa. Oznacza to, że na każdej powierzchni, która ma co najmniej dwa współczynniki gładkości, można wykonać takie same prognozy ilościowe dotyczące fal, które są możliwe na gładkich powierzchniach bez krawędzi i narożników.

Niniejszy projekt ma na celu rozważenie naturalnego kolejnego pytania: czy dla regularności L_p krytyczna gładkość jest dokładnie równa dwa, czy też jest mniejsza? A jeśli krytyczna gładkość w samej rzeczy wynosi dwa, to czy być może nadal można przewidzieć zachowanie fal odbijających się na bardzo chropowatych powierzchniach, nawet jeśli prognozy te nie są tak silne, jak dla powierzchni o liczbie gładkości większej niż dwa?

Te pytania są ważne dla naszego zrozumienia natury i otaczającego nas świata, ponieważ odpowiedzi na takie pytania dotyczą wielu rodzajów fal na wielu rodzajach powierzchni, wykorzystując tylko jako dane wejściowe równanie falowe i miarę gładkości powierzchni.

Oczekuje się, że projekt określi krytyczną miarę gładkości dla regularności L_p , a także doprowadzi do lepszego zrozumienia fal na powierzchniach o mierze gładkości poniżej wartości krytycznej.