NCN, OPUS 26

Równania różniczkowe cząstkowe
w analizie i geometrii zespolonej i wypukłej

Zbigniew Błocki (PI)

Streszczenie popularnonaukowe

Z punktu widzenia przeciętnego człowieka liczby zespolone mają dość abstrakcyjny (czy też *urojony*) charakter. Ale tak naprawdę w matematyce pełnią kluczową rolę, są też często wykorzystywane w fizyce i wielu innych naukach (choć pewnie czasami sami naukowcy pracujący w tych dziedzinach nawet nie zdają sobie z tego sprawy). Wiele problemów matematycznych, których sformułowanie jest elementarne i często zrozumiałe dla takiego *przeciętnego człowieka*, np. w teorii liczb, geometrii algebraicznej, czy teorii równań różniczkowych, znajduje swoje rozwiązanie właśnie przy wykorzystaniu liczb zespolonych. Nie jest przypadkiem, że od kilkuset lat czołowi matematycy, jak choćby Euler, Gauss, czy Riemann między innymi analizą zespoloną intensywnie się zajmowali. Anegdota przypisywana słynnemu (przynajmniej w Japonii) matematykowi Kiyoshi Oka głosi, że swoim studentom na tablicy rysował koło, które miało obrazować całą matematykę, według niego wnętrze tego koła to analiza zespolona, a jego brzeg to reszta matematyki.

Ten projekt zajmuje się podstawowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi w analizie wielu zmiennych zespolonych: równaniem $\bar\partial$ (zwanym też niejednorodnym równaniem Cauchy'ego-Riemanna) oraz zespolonym równaniem Monge'a-Ampère'a. Równanie $\bar\partial$ i teoria oszacowań L^2 zapoczątkowana w latach 60-ych przez Hörmandera pozwalają między innymi konstruować funkcje holomorficzne w nietrywialny sposób. Jednym z potencjalnych zastosowań spoza analizy zespolonej może być próba udowodnienia hipotezy Mahlera z analizy wypukłej sformułowanej w latach 30-ych XX wieku. Mówi ona, że dla symetrycznego ciała wypukłego w $\mathbb{R}^n$ najmniejszy możliwy iloczyn jego objętości i objętości ciała dualnego jest osiągany dla n-wymiarowej kostki. Do tej pory udało się to udowodnić tylko w wymiarach 2 i 3. Około 10 lat temu Nazarow przedstawił równoważne sformułowanie tego problemu polegające na skonstruowaniu funkcji holomorficznej w $\mathbb{C}^n$ z odpowiednimi oszacowaniami L^2. Wydaje się, że teoria Hörmandera dla operatora $\bar\partial$ oraz nowe rezultaty i metody wypracowane w niej w ostatnich latach są dobrą okazją do badania tej równoważnej hipotezy Nazarowa i pokrewnych problemów.

Zespolone równanie Monge'a-Ampére'a jest w pełni nieliniowym równaniem eliptycznym drugiego rzędu. Jego nieliniowość powoduje, że rozwiązanie problemu Dirichleta dla tego równania jest znacznie trudniejsze, nie możemy np. liczyć na rozwiązania dane przy pomocy wzorów reprezentacyjnych (tak jak to ma miejsce w przypadku równania Poissona, które jest liniowe). Istnienie takich rozwiązań jest dowodzone nie wprost, przy pomocy analizy funkcjonalnej i tzw. metody ciągłości, a główną rolę pełnią oszacowania a priori. W ten np. sposób Yau w latach 70-ych udowodnił hipotezę Calabiego, czyli istnienie metryk kählerowskich o odpowiedniej krzywiźnie. Między innymi z tego powodu zespolone równanie Monge'a-Ampère'a pełni centralną rolę w geometrii zespolonej. Jest również kluczowe w teorii pluripotencjału (czy teorii potencjału dla wielu zmiennych zespolonych), w tym wypadku szukamy słabych, czyli niekoniecznie gładkich rozwiązań tego równania.

Jednym z celów projektu jest badanie regularności rozwiązań tego równania oraz możliwych zespolonych nierówności izoperymetrycznych z tym równaniem związanych. Byłyby one odpowiednikiem klasycznej nierówności izoperymetrycznej (dającej optymalne górne oszacowanie na pole obszaru na płaszczyźnie przy pomocy jego obwodu), a także nierówności Aleksandrowa-Fenchela dla ciał wypukłych w $\mathbb{R}^n$. Taka zespolona nierówność izoperymetryczna implikowałaby w szczególności ważne ooptymalne oszacowania dla zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a pozwalając znaleźć nowe rozwiązania dla tego równania.