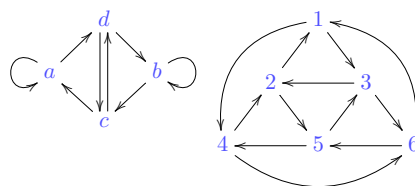


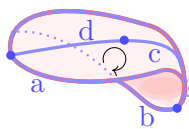
Projekt poświęcony jest zagadnieniom na styku algebry i teorii reprezentacji algebr, które w interesujący sposób powiązane są z kombinatoryką powierzchni triangulowalnych, tzn. 2-wymiarowych rozmaitości zwartych z ustaloną triangulacją. Pojęcie reprezentacji (początkowo w kontekście grup) zostało po raz pierwszy zbadane przez Frobeniusa w drugiej połowie XIX wieku, i jego autor zapewne wtedy nie przypuszczał, że kilkadziesiąt lat później pojęcie to znajdzie zastosowanie w mechanice kwantowej (w opisie orbitali elektronowych), czy w teorii drgań cząsteczki. Reprezentacje (później zwane również modułami) odgrywały istotną rolę w rozwoju matematyki – zwłaszcza algebry – i od lat 70 XX wieku stanowią oddzielny obiekt badań teorii nazywanej teorią reprezentacji algebr. Przyjmujemy taką datę narodzin tej teorii, ponieważ jej bujny rozkwit od lat 70 zawdzięczamy wprowadzeniu pojęcia kołczanu, które zrewolucjonizowało podejście do opisu struktury algebr i ich kategorii modułów nadając mu nowy kombinatoryczny charakter.

Kołczany to nic innego jak grafy skierowane, ale z możliwością wielokrotnych strzałek i pętli. Opis algebry (nad ciałem K) poprzez kołczan z relacjami polega na wskazaniu kołczanu Q oraz pewnego zestawu równości nazywanych relacjami, w taki sposób, że dana algebra jest algebrą ilorazową postaci KQ/I , gdzie KQ to tzw. algebra dróg kołczanu Q (jej bazę stanowią wszystkie drogi w Q), a I jest dwustronnym ideałem w KQ generowanym przez wskazane relacje (które są kombinacjami liniowymi pewnych dróg, w ten sposób, że generator $\rho \in I$ odpowiada równości $\rho = 0$ w A).

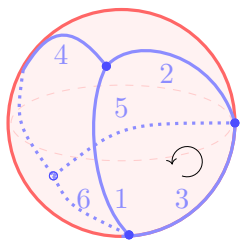
PRZYKŁADOWE KOŁCZANY



TRIANGULACJA DYSKU



TRIANGULACJA SFERY



Naszym głównym obiektem zainteresowania są algebry stowarzyszone z triangulacjami powierzchni zwartych, zwane również ważonymi algebrami powierzchni, których zdefiniowanie było efektem syntezy wieloletnich badań nad tzw. algebrami symetrycznymi i okresowymi, które przyciągają uwagę matematyków od co najmniej osiemdziesięciu lat. W konstrukcji ważonej algebry powierzchni startujemy od powierzchni z triangulacją oraz dowolnie wybraną orientacją trójkątów, i stowarzyszymy z nią tzw. kołczan triangulowalny Q , w którym wierzchołkami są krawędzie triangulacji, a strzałki odzwierciedlają wybraną orientację. Wówczas ważoną algebrą tej powierzchni definiujemy jako algebrę KQ/I , gdzie I jest generowany przez 'relacje' uzależnione od wzajemnego położenia trójkątów w triangulacji oraz pewnych wag. Na przykład na rysunku po powyżej widzimy kołczany triangulowalne stowarzyszone z triangulacjami powierzchni z rysunku po lewej (wybieramy tzw. zgodną orientację wszystkich trójkątów, tzn. taką, że każda krawędź wspólna dla dwóch trójkątów, jest zorientowana przeciwnie w obu z nich).

Ostatnie wyniki otrzymane w 2019 roku pokazują uniwersalność powyższej konstrukcji. Udowodniono mianowicie, że jeśli dana jest algebra $A = KQ/I$, gdzie Q ma przynajmniej 4 wierzchołki i jest 2-regularny (tj. każdy wierzchołek w Q jest początkiem i końcem dokładnie dwóch strzałek), to A jest oswojoną symetryczną algebrą o okresie 4 wtedy i tylko wtedy, gdy A jest ważoną algebrą powierzchni (poza kilkoma wyjątkami) albo tzw. wyższą algebrą czworościanu (ta ostatnia jest określona przez drugi z kołczanów na rysunku, ale relacje są inne niż w przypadku algebry powierzchni stowarzyszonej z tym kołczanem triangulowalnym). Ponadto, w latach 2021-2023 prowadzone były intensywne badania nad rozszerzeniem tych wyników, czego rezultatem było odkrycie dwóch nowych klas algebr istotnie uogólniających ważne algebry powierzchni. Najszerszą z tych klas nazwaliśmy klasą uogólnionych ważonych algebr powierzchni, ponieważ ich konstrukcja jest pewnym subtelnym odpowiednikiem poprzedniej konstrukcji, w której punktem wyjścia jest powierzchnia z triangulacją.

Celem tego projektu jest przedstawienie pełnej klasyfikacji wszystkich oswojonych symetrycznych algebr okresowych o okresie 4, które stanowią istotny obiekt badań powiązany z różnymi działaniami algebry. Taka klasyfikacja była by rozwiązaniem długoletniego ważnego problemu otwartego oraz uwieńczeniem wielu lat pracy. Ponadto ostatnie wyniki wskazują bardzo wyraźnie, że klasa uogólnionych ważonych algebr powierzchni jest naturalnym kandydatem. Główna hipoteza tego projektu jest taka, że każda oswojona algebra symetryczna o okresie 4 (poza wyjątkami) jest uogólnioną ważoną algebrą powierzchni. Poza udowodnieniem tego twierdzenia projekt skupia się na badaniu ww. klas algebr pod kątem wykorzystania pojęcia mutacji, które ma naturalną interpretację zarówno w języku "flipów" triangulacji powierzchni jak i w języku algebry homologicznej.