

STRESZCZENIE POPULARNONAUKOWE

Badanie równań wielomianowych to głęboka tradycja w matematyce, sięgająca korzeniami matematyki mezopotamskiej sprzed kilku tysięcy lat. Od tego czasu rozwijało się przez stulecia i cywilizacje. Później, w XIX wieku, wywołało to zupełnie nową dziedzinę, która stała się jedną z głównych dziedzin współczesnej matematyki teoretycznej – geometrię algebraiczną. W terminach współczesnych, jest to badanie równań w strukturach algebraicznych znanych jako *ciała*.

Równocześnie z rozwojem geometrii algebraicznej, w XIX, XX i XXI wieku rozwinął się inny rodzaj struktur algebraicznych – *grupy* – które od lat 80. XX wieku są badane nie tylko jako obiekty algebraiczne, ale także jako obiekty geometryczne, dając początek tzw. geometrycznej teorii grup. Łącząc dwie wyżej wymienione dziedziny matematyki, w latach 90. XX wieku wprowadzono „geometrię algebraiczną nad grupami”, która miała na celu badanie równań w grupach, a nie w ciałach.

Jedną z najważniejszych właściwości ciał jest to, że aby rozwiązać dowolny układ równań nad ciałem, wystarczy rozważyć skończenie wiele z tych równań – dodanie któregośkolwiek z pozostałych nie wprowadza żadnych nowych ograniczeń. Nie jest to koniecznie prawdą w przypadku równań nad grupą G , ale jeśli tak jest, mówimy, że G jest *równaniowo noetherowska*. Takie grupy badano przez większość drugiej połowy XX wieku jako obiekty algebraiczne. Okazało się jednak, że są one powiązane ze słynnymi problemami Tarskiego – postawionymi przez Alfreda Tarskiego w latach 40. XX wieku i wreszcie rozwiązanymi w 2006 roku za pomocą metod geometrycznych, pokazując, że z punktu widzenia logiki matematycznej nie da się rozróżnić dwóch „grup wolnych”. Od tego czasu geometria jest szeroko wykorzystywana do badania grup równaniowo noetherowskich, a rozwój tych badań jest jednym z głównych celów tego projektu.

W ciągu ostatnich pięciu lat odkryto zaskakujący związek między grupami równaniowo noetherowskimi a stopniem wzrostu grup. Aby to zrozumieć, rozważmy analogię mrówki chodzącej po różnych obiektach. Można zadać sobie pytanie: jaką powierzchnię swojego „świata” mrówka może widzieć po przejściu pewnej odległości r ? Jeśli nasza mrówka znajduje się na skończonym obiekcie, np. na kamieniu, to może odwiedzić dowolne miejsce po przejściu pewnej skończonej odległości; natomiast jeśli znajduje się na (dużej) kartce papieru, to po przejściu r centymetrów może odwiedzić πr^2 centymetrów kwadratowych swojego świata.

Jednakże, jeśli mrówka znajduje się na dużym, kręconym liściu, np. na liściu jarmużu, to może odwiedzić nawet więcej niż πr^2 cm² swojego świata po przejściu zaledwie r cm – w rzeczywistości, jest możliwe, że co kilka centymetrów powierzchnia świata dostępna dla mrówki podwaja się! I okazuje się, że większość grup rośnie dokładnie tak samo – mają tzw. wzrost wykładniczy. Można się więc zastanawiać, jak daleko mrówka musi iść, aby powierzchnia świata dostępna do niej podwoiła się – może dzieje się tak co 5 cm, a może wystarczą tylko 2 cm? To właśnie mierzy *stopień wzrostu* grupy, a badanie tych stopni wzrostu jest drugim głównym celem projektu.