

Równania Hesjanowe i Analiza Geometryczna

Projekt ten będzie dotyczył szeregu zagadnień z pogranicza matematycznych poddziedzin geometrii różniczkowej i teorii równań różniczkowych cząstkowych (RRC) - działu matematyki zwanego wspólnie analizą geometryczną.

Ogólnie rzecz biorąc, geometria różniczkowa koncentruje się na obiektach, zwanych rozmaitościami, posiadających lub mogących przyjąć jakąś specjalną strukturę - jak metryka (matematyczne narzędzie do pomiaru odległości) o wymaganych własnościach (w języku matematycznym zwanymi na przykład - krzywizną). Obiekty te, tj. rozmaitości ze specjalnymi metrykami, są centralnymi narzędziami współczesnej fizyki matematycznej do budowania modeli teorii wyjaśniających na przykład fundamentalne siły natury. Problem istnienia metryki z wymaganymi właściwościami jest zwykle bardzo trudny do rozwiązania. Dzieje się tak m. in. dlatego, że najczęściej nie da się skonstruować takiej metryki wprost. Zamiast tego można mieć nadzieję jedynie na wykazanie, że taki obiekt - metryka - musi istnieć. Zwykle odbywa się to poprzez zakodowanie istnienia metryki za pomocą równania (równania różniczkowego cząstkowego), które musi ona spełnić. Następnie pokazuje się, za pomocą technicznego aparatu matematycznego, że rozwiązanie faktycznie musi istnieć.

W ten sposób dochodzimy do drugiej wspomnianej poddziedziny - teorii RRC, która jest wykorzystywana do zapewnienia wspomnianej rozwiązalności otrzymanych równań. Jest to bardzo potężna teoria, rozwijająca się bardzo szybko i owocnie przez ostatnie 70 lat i opierająca się w dużej mierze na maszynarii nowoczesnej analizy. Przede wszystkim istotne w niej są tak zwane oszacowania a priori. Są to oszacowania, które próbuje się udowodnić dla rozwiązania RRC, nawet zanim dowiemy się, że rozwiązanie faktycznie istnieje.

Celem tego projektu jest przyczynienie się do rozwoju opisanej powyżej ogólnej teorii RRC. Dokładniej rzecz ujmując, będziemy badać klasę tzw. równań typu Hesjanowego. Jest to szczególna klasa równań eliptycznych na rozmaitościach Riemannowskich. Mamy nadzieję poszerzyć wiedzę o tych równaniach, dowodząc rozwiązywalność w niektórych nieznanych przypadkach, poprawiając znane oszacowania rozwiązań i być może łącząc rozwiązywalność, w przypadkach, gdy okaże się ona warunkowa, z niektórymi wielkościami geometrycznymi.