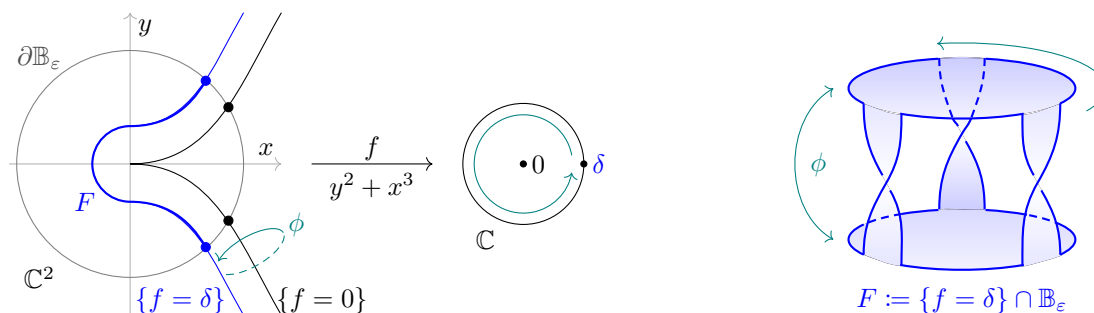


# GEOMETRIA W PROMIENIU ZERO: NOWE KONSTRUKCJE HYBRYDOWE W TEORII OSOBLIWOŚCI I SYMETRII LUSTRZANEJ STRESZCZENIE POPULARNONAUKOWE

*Geometria* w szerokim rozumieniu zajmuje się badaniem obiektów i ich symetrii, a rodzaj geometrii zależy od dopuszczanych symetrii (ta koncepcja nosi nazwę *programu erlangeńskiego* F. Kleina z 1872r). Na przykład, geometria na płaszczyźnie, którą znamy ze szkoły, zezwala jedynie na obroty, symetrie osiowe i przesunięcia. *Geometria algebraiczna* dopuszcza symetrie zadane odwzorowaniami wielomianowymi. Na drugim końcu spektrum znajduje się *topologia*, która pozwala na dowolne rozciąganie i ściskanie (bez rozrywania i klejenia). Oczywiście, topologia daje dużo więcej swobody (i ładne rysunki), a geometria algebraiczna jest dość sztywna i bliższa komputerowym obliczeniom. Jedną z głównych motywacji tego projektu jest pytanie **jak wiele algebraicznych informacji można odczytać z topologii** lub geometrii symplektycznej (zob. poniżej).

Przykładem takiej algebraicznej informacji jest *krotność* wielomianu w zerze. Rozważmy wielomian  $f$ , np.  $f(x, y) = y^2 + x^3$ . Równanie  $\{f = 0\}$  zadaje hiperpowierzchnię w zespolonej przestrzeni  $\mathbb{C}^n$ , którą rozważamy w otoczeniu zera. Dla  $y^2 + x^3$ , jej część rzeczywista jest przedstawiona na lewym rysunku. *Krotność*  $f$  to najniższy stopień składników  $f$ , np.  $y^2 + x^3$  ma krotność 2. Jest to jeden z podstawowych niezmienników algebraicznych. W 1971r. Zariski zadał pytanie, czy krotność można odczytać z topologii hiperpowierzchni  $\{f = 0\}$  w  $\mathbb{C}^n$ . Co zaskakujące, to proste pytanie jest wciąż otwarte, i próby jego rozwiązania w dużej mierze ukształtowały ostatnie półwiecze teorii osobliwości.



Topologia  $\{f = 0\}$  w  $\mathbb{C}^n$  jest opisana przez *włókno Milnora*  $F$ , czyli hiperpowierzchnię  $\{f = \delta\}$  przeciętą z małą kulą o środku w 0, i *monodromię*  $\phi: F \rightarrow F$ , czyli przekształcenie zadane przez przejście raz dookoła *tuby Milnora*  $\{|f| = \delta\}$ . Dla  $f = y^2 + x^3$ , włókno Milnora jest przedstawione po prawej: jest to powierzchnia z jedną “dziurą”, której brzegiem jest znany węzeł trójlistny. Monodromia  $\phi$  obraca  $F$  o  $120^\circ$ , cyklicznie permutując 3 “wstażki”, i o  $180^\circ$ , zamieniając górną i dolną “pokrywkę”.

Na pierwszy rzut oka nie jest jasne, jak z tego obrazka odczytać krotność; ale da się to zrobić: jest to najmniejsza taka liczba  $\nu \geq 1$ , że  $\nu$ -ta iteracja  $\phi$  ma punkt stały. Rzeczywiście,  $\phi$  nie ma punktów stałych, ale druga iteracja  $\phi \circ \phi$  to zwykły obrót, który nie rusza środka każdej z “pokrywek”.

Niestety, ta charakteryzacja nie działa dla wszystkich wielomianów  $f$ . Można ją jednak poprawić przechodząc do *geometrii symplektycznej*. Jest to nieco sztywniejsza geometria, gdzie symetrie muszą zachowywać pola figur. W 2019r. M. McLean wykazał, że krotność jest niezmiennikiem symplektycznym, i można ją scharakteryzować, jak powyżej, za pomocą dynamiki symplektycznej monodromii.

Wspólnie z J. Fernándezem de Bobadillą, uogólniliśmy wynik McLeana przy pomocy następującej “hybrydowej” konstrukcji: zastąpiliśmy centralne włókno  $\{f = 0\}$  kopią tuby Milnora “o promieniu zero”, w taki sposób, że symplektyczna monodromia “w promieniu zero” ma łatwą do opisu dynamikę. To uogólnienie pozwoliło częściowo odpowiedzieć na pytanie Zariskiego: wykazaliśmy, że *krotność osobliwości izolowanych jest stała w rodzinach o tej samej topologii*.

W tym projekcie planuję **rozwinąć konstrukcję “w promieniu zero” i zastosować ją do innych zagadnień deformacyjnych**. W ten sposób, zamierzam zbadać związki między geometrią algebraiczną, symplektyczną, i topologią, które okazują się być zaskakująco subtelne.

Ponadto, łatwa w opisie geometria “w promieniu 0” pozwala zaobserwować zjawiska podobne do tych przewidzianych przez *symetrię lustrzaną*: serię głębokich hipotez, które wiążą geometrię algebraiczną i symplektyczną, a oryginalnie wywodzą się z fizyki. Wobec tego, nasza konstrukcja **stanowi nowe narzędzie do badania zagadnień symetrii lustrzanej**, którego planuję użyć w tym projekcie.