

Streszczenie popularnonaukowe

Niezależnie od tego czy wszechświat jest w swojej naturze obliczalny czy nie, wiele problemów w nauce i życiu codziennym może zostać sprowadzona do pewnego procesu obliczeniowego. To stwierdzenie wydaje się trywialne w czasach gdy każdy nosi w kieszeni maszynę Turinga o większej mocy obliczeniowej niż ta użyta w czasie lądowania Apollo 11 na Księżycu. Tym niemniej, natura obliczalności kryje w sobie jeszcze wiele tajemnic nierozwiązanych przez ludzkość. W szczególności jeden z problemów milenijnych Matematycznego Instytutu Claya: $P \stackrel{?}{=} NP$ wydaje się daleki od rozwiązania. Pytanie to można uprościć w następujący sposób: czy problemy obliczeniowe, których rozwiązania mogą być szybko zweryfikowane (NP) to te same dla których rozwiązanie można szybko obliczyć (P)?

NP rozumiane jako klasa problemów obliczeniowych zawiera: analizę fałdowania białek w celu odkrywania leków, składania sekwencji DNA i wielokrotne dopasowywanie sekwencji (MSA) tylko jeśli ograniczymy się do biologii i medycyny. Pozytywna odpowiedź na pytanie $P \stackrel{?}{=} NP$ znacznie przyspieszyłaby algorytmy dla powyższych problemów, ale także dla wielu innych w fizyce i chemii: umożliwiłaby projektowanie nowych materiałów i lepsze przewidywanie zjawisk naturalnych, takich jak pogoda czy trzęsienia ziemi. Również w sztucznej inteligencji: łatwiej byłoby znaleźć optymalne architektury sieci neuronowych, co prowadziłoby do lepszego rozumienia języka, rozpoznawania obrazu i podejmowania decyzji. Wreszcie, i przede wszystkim, współczesna kryptografia klucza publicznego (wykorzystywana do bezpiecznych transakcji internetowych, bankowości i komunikacji prywatnej) opiera się na założeniu, że pewne problemy, takie jak rozkład liczb całkowitych na czynniki pierwsze, są trudne do rozwiązania. Z drugiej strony, jeśli odpowiedź na pytanie $P \stackrel{?}{=} NP$ jest negatywna, co jest powszechnie oczekiwane, pogłębiłoby to nasze zrozumienie natury obliczalności.

" $P \stackrel{?}{=} NP$ " jest jednym z wielu otwartych pytań w dziedzinie złożoności obliczeniowej. Inne, które można zapisać jako " $NL \stackrel{?}{=} P$?" sprowadza się do tego czy każdy z łatwo rozwiązywalnych problemów (P) da się sprowadzić do szukania ścieżki w grafie skierowanym pomiędzy określonym źródłem i ujściem. Kolejne, ważne pytanie w kontekście opisywanego projektu to: $L \stackrel{?}{=} NL$. Jest ono podobne to " $P \stackrel{?}{=} NP$?" z tym, że dotyczy ograniczenia pamięci, a nie czasu, którym się dysponuje by rozwiązać problem. Równoważnie, pytamy o to czy znalezienie ścieżki ze źródła do ujścia w grafie skierowanym ma tę samą złożoność co w grafie nieskierowanym (w którym każda krawędź jest symetryczna). Spodziewana odpowiedź na obydwa pytania jest negatywna.

Ogólnie rzecz biorąc omawiany projekt dotyczy podklasy NP składającej się z problemów obliczeniowych, które można sformułować jako problemy spełnialności więzów $CSP(\mathbb{A})$ nad pewnymi nieskończonymi strukturami relacyjnymi $\mathbb{A}$. Z grubsza, instancja $CSP(\mathbb{A})$ jest zbiorem więzów (ograniczeń) zbudowanym ze zmiennych i relacji z $\mathbb{A}$. Pytamy czy wszystkie więzy da się spełnić jednocześnie? Dla różnych $\mathbb{A}$ mamy do czynienia z różnymi problemami obliczeniowymi, włączając w to problemy obliczeniowe badane niezależnie we wnioskowaniu o zależnościach czasowych i przestrzennych (ang. temporal and spatial reasoning), rekonstrukcji filogenetycznej i teorii grafów.

Świętym gralem w tej dziedzinie jest opisanie wszystkich szybko rozwiązywalnych problemów (w P), które są wyrażalne w przytoczonym powyżej formalizmie. Taki wynik rozszerzyłby twierdzenie o dychotomii dla $CSP(\mathbb{A})$ nad skończonymi strukturami relacyjnymi $\mathbb{A}$ udowodnione niezależnie przez Andreia Bulatova i Dimitriego Zhuka. Obydwaj autorzy otrzymali nagrodę: Best Paper Award na Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS) w 2017 roku. Drugi z tych autorów zaprezentował twierdzenie o dychotomii również na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w 2022 roku.

Hipoteza uogólniająca twierdzenie Bulatova-Zhuka na wspomniane wyżej struktury nieskończone znana jest jako hipoteza Bodirsky'ego-Pinskera. Wydaje się, że nie zostanie ona rozwiązana w najbliższej przyszłości. M.in. z tego powodu konkretne pytania badawcze postawione w omawianym projekcie skupiają się na tych problemach obliczeniowych opisywanych przez hipotezę Bodirsky'ego-Pinskera, które mogą być rozwiązane za pomocą algorytmu sprawdzania lokalnej zgodności. Są zatem w P. Niewiadomo jednak, które z tych problemów są w NL, a które w L. Podobnie jak w przypadku $P \stackrel{?}{=} NP$ uważa się, że istnieją problemy rozwiązywalne za pomocą algorytmu sprawdzania lokalnej zgodności, które nie są w żadnej z tych dwu klas.