GRADOWANA GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA WRAZ Z ZASTOSOWANIAMI

Koncepcja *gradowanej supergeometrii* wywodzi się z idei supersymetrii, zrodzonej na potrzeby fizyki. W istocie, zunifikowana teoria mocnych, słabych, elektromagnetycznych i grawitacyjnych oddziaływań jest sformułowana w języku superrozmaitości. W rachunku różniczkowym w wersji 'super' pracuje się ze zmiennymi wyposażonymi w *parzystość*, przyjmującą wartości 1 (zmienne nieparzyste) i 0 (zmienne parzyste). Super-odpowiednikiem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze współrzędnymi (zmiennymi) $(x^1, \ldots, x^n)$ są *super-przestrzenie* $\mathbb{R}^{p|q}$ z *super-współrzędnymi* $(x^1, \ldots, x^p, \xi^1, \ldots, \xi^q)$, gdzie x^i są parzyste a ξ^a są nieparzyste. Parzystość definiuje *reguły komutacji*: współrzędne parzyste komutują ze wszystkimi współrzędnymi, $x^i \cdot x^j = x^j \cdot x^j$ (jak dla zwykłych współrzędnych) i $x^i \cdot \xi^a = \xi^a \cdot x^i$, podczas gdy współrzędne nieparzyste anty-komutują ze sobą, $\xi^a \cdot \xi^b = -\xi^b \cdot \xi^a$. Potrzeba rachunku z anty-komutującymi zmiennymi stała się jasna, gdy fizycy odkryli, że każda cząstka elementarna jest albo *fermionem* (np. elektron) albo *bozonem* (np. cząstka światła, foton), a różnica polega na rodzaju oddziaływania; pola bozonowe komutują, podczas gdy pola fermionowe anty-komutują. Implikuje to, że fermiony nie mogą współistnieć w tym samym stanie kwantowym.

Fundamentalnym odkryciem dokonanym przez F.A. Berezina w latach 60-tych była obserwacja, że można rozwinąć rachunek różniczkowy i geometrię różniczkową z super-współrzędnymi, pracując z (super)funkcjami różniczkowalnymi (można temu pojęciu precyzyjny sens) zależącymi od super-zmiennych. Pochodne cząstkowe i ogólniej, operatory różniczkowe w super-zmiennych, również spełniają pewne reguły komutacji. Fakt, że nieparzyste zmienne anty-komutują implikuje, że superfunkcje są wielomianowe w zmiennych nieparzystych. Globalne obiekty, *superrozmaitości*, są skonstruowane poprzez sklejenie lokalnych map wyposażonych w super-współrzędne za pomocą tzw. *funkcji przejścia*, które są super-dyfeomorfizmami. Opisana 'supermatematyka' jest szeroko stosowana w rozmaitych dziedzinach nauki, zwłaszcza w fizyce w mechanice kwantowej i kwantowej teorii pola.

Jeżeli pewna wyróżniona rodzina super-współrzędnych jest wyposażona dodatkowo w wagę (stopień), która jest na ogół liczbą całkowitą, to mówimy o lokalnej *gradacji*. Jednak, podczas gdy pojęcie superfunkcji jest całkowicie zdeterminowane przez parzystość i reguły komutacji, w przypadku $\mathbb{Z}$-gradacji występuje pewna dowolność w wyróżnieniu funkcji 'dopuszczalnych'. Dla gradacji przyjmujących wartości tylko w liczbach naturalnych jest przyjęte rozważanie wyłącznie funkcji, które są wielomianowe względem zmiennych z niezerową wagą. Tymczasem, w przypadku gradacji z wagami zarówno dodatnimi jak i ujemnymi, funkcje wielomianowe zazwyczaj nie wystarczają. Istnieją dwa główne podejścia do tego problemu: pierwsze dopuszcza szeregi formalne od zmiennych z niezerową wagą, podczas gdy drugie dopuszcza wszystkie funkcje otrzymane jako kombinacje funkcji jednorodnych. Jednorodność jest zdefiniowana poprzez wyróżnienie tzw. *wagowego pola wektorowego* ∇, które we współrzędnych y^i z wagą w_i ma postać $\nabla = \sum_i w_i \, y^i \, \frac{\partial}{\partial y^i}$. Pole wagowe zawiera całą informację o gradacji: funkcja f jest jednorodna z wagą w, gdy $\nabla(f) = wf$. Nawet w standardowym (czysto parzystym) przypadku, dodanie gradacji wzbogaca teorię i znajduje zastosowanie w różnych dziedzinach, np. mechanice geometrycznej, tym bardziej, że np. wiązki wektorowe są prostym przykładem rozmaitości gradowanych, a trudno przecenić ich znaczenie w matematyce i fizyce (ale również w ekonomii, medycynie itd.).

Nie powinno dziwić, że w przeciwieństwie do standardowej matematyki, super-komutatory operatorów liniowych $[A, A] = AA \pm AA$ mogą nie być zerowe; dla operatorów nieparzystych, $[A, A] = AA + AA = 2A^2$. Jeżeli dla nieparzystego różniczkowania Q stopnia 1 pewnej superalgebry superfunkcji z gradacją mamy $[Q, Q] = 2Q^2 = 0$, to nazywamy je *homologicznym polem wektorowym* (nazwa ma korzenie w algebrze homologicznej), a odpowiednią rozmaitość *dg-rozmaitością* (dg=differential graded). Dobrze znanym przykładem Q jest różniczka de Rhama w $\mathbb{N}$-gradowanej superalgebrze form różniczkowych na rozmaitości M. Ta superalgebra może być rozumiana jako algebra superfunkcji na 'super' odpowiedniku wiązki stycznej TM. Idea dg-rozmaitości pochodzi z fizyki teoretycznej, mianowicie z *formalizmu BV-BRST*, który jest potężnym narzędziem do pracy z singularnymi lagranżianami w fizyce kwantowej i potencjalnie istotnym opisem części praw rządzących Wszechświatem.

Nasz projekt jest poświęcony badaniom struktury (super)rozmaitości gradowanych, ich wzajemnych relacji, odpowiednich jednorodnych struktur geometrycznych różnego rodzaju i możliwych zastosowań. Jest wiele otwartych problemów w tej dziedzinie, istotnych z punktu widzenia analizy matematycznej, geometrii i wielu obszarów fizyki. Mamy nadzieję rozwiązać dużą część tych problemów i opublikować nasze wyniki w liczących się międzynarodowych czasopismach naukowych.