Miary złożoności strukturalnej dla teorii podstaw matematyki

Streszczenie popularnonaukowe

Jednym z ważniejszych narzędzi wykorzystywanych w badaniach naukowych jest formalizacja dokonywanych obserwacji. Pozwala ona na wyrażenie istotnych aspektów badanych zjawisk w precyzyjnym języku formalnym. W szczególności, w matematyce formułuje się zestawy aksjomatów w języku odpowiedniej logiki, np. logiki pierwszego rzędu, żeby uchwycić istotne własności badanych struktur lub operacji. Jak pokazują jednak twierdzenia limitacyjne, odkryte już na wczesnym stadium rozwoju logiki matematycznej, ta metoda napotyka na bardzo istotne ograniczenia. Twierdzenie Gödla o pełności pokazuje, że - poza trywialnymi przypadkami - wybrane przez nas zestawy aksjomatów w logice pierwszego rzędu będą prawdziwe też w wielu innych strukturach, znacząco różniących się od pierwotnie wybranego przez nas modelu. I tak np. Arytmetyka Peana, kanoniczna teoria opisująca własności dodawania i mnożenia liczb naturalnych, ma nieskończenie wiele bardzo różnych modeli niestandardowych, których badanie rozwinęło się już w osobną poddyscyplinę logiki matematycznej.

Jakie własności mają takie „niepożądane" struktury? Jak trudno jest odróżnić je od wyjściowego, zamierzonego modelu? Ponadto: jak trudno jest scharakteryzować elementy modelu, które mają niezamierzone przez nas własności? Oryginalnym pomysłem, który stoi za naszym projektem, jest wykorzystanie teorii Scotta do poszukiwania odpowiedzi na powyższe i pokrewne pytania. Teoria ta dostarcza wyjątkowo stabilnej miary złożoności strukturalnej modeli, która znalazła już zastosowanie w teorii struktur obliczalnych i deskryptywnej teorii mnogości. Miara ta opiera się na złożoności formuł, mówiąc technicznie: ich randze, w logice infinitarnej, a złożoność przeliczalnego modelu względem tej miary definiuje się jako najmniejszą rangę formuły, która jednoznacznie opisuje dany model (z dokładnością do izomorfizmu). Choć badania dotyczące tej miary prowadzone są już od wielu lat, jak do tej pory niezwykle rzadko była ona wykorzystywana do badania teorii podstaw matematyki, czyli zestawów aksjomatów zdolnych wyrazić duże porcje współczesnej matematyki. Teorie takie jak wspomniana Arytmetyka Peana, ale także arytmetyka drugiego rzędu, teorie mnogości Kripkego-Platka i Zermelo-Fraenkla wciąż nie doczekały się pogłębionej analizy w terminach teorii Scotta.

Celem naszego projektu jest zapełnienie tej luki oraz przedstawienie kompleksowej analizy Scotta teorii podstaw matematyki. Zamierzamy położyć szczególny nacisk na następujące pytanie: kiedy teoria podstaw matematyki ma model zamierzony i jakie są źródła tego zjawiska? Jedną z badanych przez nas hipotez jest to, że ranga Scotta dostarcza odpowiedniej miary złożoności struktur, która pozwalałaby scharakteryzować model zamierzony jako najprostszy model danej teorii. Dla uzyskania jaśniejszego obrazu wprowadzamy pojęcie funkcji Scotta, która mierzy, ile modeli danej rangi posiada wybrana teoria.

Przewidujemy, że interesującym produktem ubocznym naszych badań będą nowe własności teorii pierwszego rzędu, takie jak np. własność najprostszego modelu, które zapewnią intuicyjne i owocne metody klasyfikacji teorii podstaw matematyki.