"Współczesne aspekty geometryczne operatorów liniowych: matrix representations, numerical ranges and related matters"

(popular description)

Przedłożony projekt badawczy dotyczy teorii odwzorowań liniowych w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych. Jest to rodzaj abstrakcji, który służy do stworzenia jednolitego ujęcia wielu pojęć matematycznych i w ten sposób prowadzi do ich lepszego zrozumienia. Aby operatory były użytecznymi w praktyce często koduje się ich, reprezentując jako nieskończone tablice liczb, zwane macierzami, dzięki czemu działanie operatorów staje się przejrzystym, a ponadto wygodnym do obliczeń. Dla ustalonego operatora istnieje wiele takich reprezentacji macierzowych, które są w pewnym sensie równoważne. Zatem, bardzo istotnym jest wyjaśnić czy wszystkie takie reprezentacje lub przynajmniej ich część można opisać w satysfakcjonujący sposób, aby dzięki temu móc wybrać reprezentację spełniające pewne żądane własności. Problem ten przez długi czas wydawał się beznadziejnym i mało pożytecznym. Dość niedawno, liderzy projektu odkryli, że reprezentacje macierzowe posiadają ukrytą strukturę, a jednocześnie dopuszczają wysoki stopień dowolności w określaniu swoich elementów. Rozważając główne przekątne tych macierzy, odkryli oni, że głowne przekątne odgrywają wyróżniającą rolę i niosą ze sobą więcej informacji o operatorze niż jej stosunkowo mały rozmiar mógłby sugerować. Okazało się, że duży podzbiór przekątnych operatora można opisać w terminach jego własności geometrycznych, mianowicie obrazu liczbowego i jego odmian. Co więcej, zakodowanie operatora jest możliwe w sposób bardzo ekonomiczny używając tablic zawierających głównie zera, a zatem operator może żyć na bardzo rozrzedzonym, lakunarnym zbiorze. Jest to pożyteczne dla analizy operatorów, i w poszczególnych przypadkach może prowadzić do wyjaśnienia ich struktury. Z drugiej strony istnieją pewne ograniczenia dotyczące konfiguracji zer w takich reprezentacjach rozrzedzonych, które w chwili obecnej pozostają niejasne. Realizując projekt zamierzamy stworzyć szeroką teorię reprezentacji macierzowych ograniczonych i nieograniczonych operatorów liniowych, z naciskiem na ich przekątne, wyjaśniając i precyzując wspomniane powyżej efekty. Będziemy także rozwijać inne wersje naszej teorii kodowania dla pewnych uogólnień operatorów, np. elementów tzw. algebr von Neumanna. będących obiektami jeszcze bardziej abstrakcyjnymi niż operator, ale nadal pożytecznymi i szeroko rozpowszechnionymi w różnych dziedzinach matematyki. Ponadto otrzymamy odpowiedniki naszych wyników o reprezentacjach macierzowych dla rodzin operatorów, zależących od parametru, uzyskując w ten sposób stabilność reprezentacji macierzowych względem perturbacji, ważną własność z punktu widzenia zastosowań.

Kluczowym narzędziem w naszych badaniach jest obraz liczbowy operatora, który można rozważać jako podzbiór płaszczyzny euklidesowej. Jak czasami stwierdza się nieformalnie, obraz liczbowy może być postrzegany jako „zdjęcie” operatora, a każdy punkt obrazu liczbowego można wyobrażać sobie jako poszczególny „piksel” tego zdjęcia. Obraz liczbowy zawiera wiele informacji o operatorze, i pozwala wnioskować o jego własnościach analitycznych i algebraicznych, patrząc na całość lub tylko na część tych pikseli. Zastosowania obrazów liczbowych dotyczą różnych, często odległych dziedzin matematyki, obejmujących analizę zespoloną, równania różniczkowe cząstkowe i geometrię różniczkową, a ponadto często pojawiają się w fizyce kwantowej i kwantowej teorii informacji. Obrazy liczbowe będą bardzo pożyteczne również w naszych badaniach reprezentacji macierzowych. Zatem w trakcie realizacji projektu będziemy starać się wyklarować szereg ważnych zagadnień dotyczących teorii obrazów liczbowych. Mianowicie, zbadamy możliwe kształty obrazów liczbowych, wyjaśnimy lokalizację obrazów liczbowych wartości funkcji operatorowych, oraz znajdziemy nowe zastosowania obrazów liczbowych do dokładnych oszacowań wielkości takich funkcji. To ostatni kierunek badań otworzy drzwi dla wielu istotnych zastosowań, m.in. w teorii równań różniczkowych cząstkowych. Nasze badania wniosą istotny wkład do rozwiązania kilku ważnych problemów związanych z reprezentacjami macierzowymi i obrazami liczbowymi, wykazując subtelne związki pomiędzy tymi podstawowymi obszarami analizy funkcjonalnej.

Praktyczne zastosowania wyników matematycznych bywają czasami dość nieoczekiwane. Wystarczy przypomnieć, że rozwiązanie słynnego problemu Kato o dziedzinie pierwiastka kwadratowego z operatora eliptycznego, zagadnieniu do poruszenia ramach tego projektu, okazało się bardzo użyteczne w ... tomografii komputerowej. Zatem niełatwo jest określić przyszłość rezultatów matematycznych przewidzianych w ramach projektu, a ich wartość może odsłonić się w sposób zaskakujący zarówno badaczy praktycznych, jak i matematyków. Jedynie pewnym wkładem projektu jest wkład w matematykę jako część kultury ludzkiej i wielu dziedzin wewnątrz niej.